FICHE M14 : Partages

Partager une grandeur, c'est la diviser en un nombre de parts égales ou inégales.

Partages égaux R130

Pour partager une grandeur en x parts égales, on la divise par x.

Franck partage son sac de pommes avec ses amis Tom et Cat. Le sac contient 36 pommes. La part de chacun est : 36 divisé par 3 = 12 pommes.

36 pommes		
: 3		
Franck 12 pommes	Tom 12 pommes	Cat 12 pommes

Partages inégaux R131

Les modalités du partage peuvent être indiquées par :

- des fractions : Franck reçoit 3/5 du sac, Tom et Cat 1/5 du sac chacun (voir chapitre sur les fractions).

5/5		
3/5	1/5	1/5

- Des pourcentages : Franck reçoit 60 % des pommes, Tom et Cat 20 % chacun (voir chapitre sur les pourcentages.

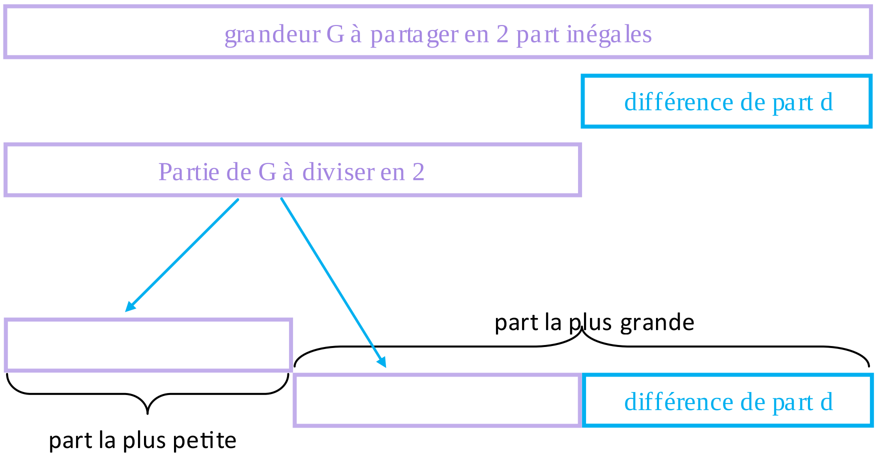
100%		
60 %	20 %	20 %

- Une différence entre les parts : Franck reçoit 6 pommes de plus que Tom et Cat.

Si Franck reçoit 6 pommes de plus, il reste 36 – 6 = 30 pommes à partager en 3 parts égales. La part de Tom est de 30/3 = 10 pommes ; la part de Cat est de 30/3=10 pommes. La part de Franck est de 30/3 +6 = 10 + 6 = 16 pommes.

Partage quand une part est supérieure à l'autre.

Pour partager une grandeur G en 2 parts inégales dont on connaît la différence d, on retranche d à G puis on divise le résultat par 2. La valeur obtenue correspond à la plus petite part.



Exemple : Tom et Cat se partagent les 1200 € de leurs gains à la loterie. Cat reçoit 200 € de plus que Tom.
On retranche à 1200 la somme que cat reçoit en plus ⇒ 1200 – 200 = 1000.
La plus petite part, celle de Tom = 1000/2 = 500 €.
La part de Cat =500 + 200 =700 €.

Partages proportionnels à une grandeur R132

Rappel de la règle R121: Si deux nombres a et b sont proportionnels à deux nombres A et B alors $\frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ avec A et B≠0.

Pour partager une grandeur G en 3 parts P1, P2, P3 proportionnellement à une grandeur ayant comme valeurs a, b et c :

- on écrit l'égalité des rapports : $\frac{P1}{a} = \frac{P2}{b} = \frac{P3}{c} = \frac{P1+P2+P3}{a+b+c} = \frac{G}{a+b+c}$
- on calcule les parts P1, P2 et P3 en appliquant la règle des produits en croix.

Applications

Le capitaine d'un navire-pirate partage le butin (2520 kg d'épices) avec ses trois officiers. Chacun recevra une quantité d'épices proportionnellement à son poids. Les poids respectifs des trois flibustiers sont 70 kg, 65 kg et 75 kg. Quel poids d'épices recevra chacun ?

- Soit P1 la part du flibustier de 70 kg
- Soit P2 la part du flibustier de 65 kg
- Soit P3 la part du flibustier de 75 kg.

D'après la règle R121 on peut écrire : $\frac{P1}{70} = \frac{P2}{65} = \frac{P3}{75}$

D'autre part on sait que P1 + P2 + P3 = 2520 = total du butin.

$\frac{P1+P2+P3}{70+65+75} = \frac{total\ du\ butin}{total\ poids\ flibustiers} = \frac{2520}{210} = \frac{P1}{70} = \frac{P2}{65} = \frac{P3}{75}$; le rapport est constant.

Appliquons la règle des produits en croix :

$$\frac{P1}{70} = \frac{2520}{210} ; \frac{P2}{65} = \frac{2520}{210} ; \frac{P3}{75} = \frac{2520}{210}$$

P1 = (2520 x 70) : 210 ;
P2 = (2520 x 65) : 210 ;
P3= (2520x75) : 210

P1 = 840 kg ; P2 = 780 kg ; P3 = 900 kg

Autre méthode.

Le poids total des trois flibustiers est de 210 Kg. (70 + 65 +75).
Le butin total : 2520 kg

$$P1 = \frac{poids\ du\ flibustier\ 1}{poids\ total} \times 2520 = \frac{70}{210} \times 2520 = 840$$

$$P2 = \frac{poids\ du\ flibustier\ 2}{poids\ total} \times 2520 = \frac{65}{210} \times 2520 = 780$$

$$P3 = \frac{poids\ du\ flibustier\ 3}{poids\ total} \times 2520 = \frac{75}{210} \times 2520 = 900$$

Autre méthode.
Le total du butin (2520 kg d'épices) correspond au poids total des flibustiers (70+65+75=210 kg). Quel poids d'épices correspond à 1 kg « de pirate » ? Si 210 kg « de pirate » correspondent à 2520 kg d'épices alors 1 kg « de pirate » correspond à 210 fois moins (2520 :210=12 kg d'épices). Il suffit de multiplier le poids de chaque flibustier par 12 pour connaître le poids de son butin.

Autre méthode

	Flibustier 1	Flibustier 2	Flibustier 3	total
poids	70	65	75	210
butin	70 x 12	65 x 12	75 x 12	2520

On cherche le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de 210 à 2520. Il est égal à 2520 divisé par 210 = 12.

Partages proportionnels à deux grandeurs R133

Revenons à notre capitaine de bateau pirate. Il s'est ravisé et a décidé d'inclure un nouveau paramètre pour effectuer le partage. Il se fera sur les mêmes bases que précédemment, mais le partage sera aussi proportionnel à la longueur de la balafre que chacun des flibustiers arbore sur son visage. On a 10 cm pour le premier, 5 cm pour le deuxième et 15 cm pour le troisième. On ne tiendra pas compte de la partie décimale pour chaque résultat.

Ici intervient une nouvelle règle :

Si des nombres sont proportionnels à deux grandeurs, alors ils sont proportionnels au produit de ces grandeurs.

La part de chaque pirate est proportionnelle au produit de son poids par la longueur de sa balafre.

Rappelons les données du problème :

- Flibustier 1 ⇒ poids = 70 kg et balafre = 10 cm
- Flibustier 2 ⇒ poids = 65 kg et balafre = 5 cm.
- Flibustier 3 ⇒ poids = 75 kg et balafre = 15 cm.

On aura :

Flibustier 1 : 70 x 10 = 700
Flibustier 2 : 65 x 5 = 325
Flibustier 3 : 75 x 15 = 1125
Total : 700 + 325 + 1125 = 2150

P1 = $\frac{700}{2150}$ x 2520 ≈ 820   P2 = $\frac{325}{2150}$ x 2520 ≈ 380   P3 = $\frac{1125}{2150}$ x 2520 ≈ 1318

Partages proportionnels à une grandeur et inversement proportionnels à une autre grandeur R134

Revenons à nouveau à notre capitaine de bateau pirate. Cet homme ne sait vraiment pas ce qu'il veut ! Il reprend les principes du partage précédent mais cette fois il sera inversement proportionnel à la longueur de la balafre.

Le partage sera donc proportionnel au poids de chaque pirate et inversement proportionnel à la longueur de sa balafre.
Ce qui signifie que la part de chaque pirate est proportionnelle au produit de son poids par l'inverse de la longueur de sa balafre.

Inverse de 10 = $\frac{1}{10}$; inverse de 5 = $\frac{1}{5}$; inverse de 15 = $\frac{1}{15}$

- Flibustier 1 : partage proportionnel à 70 et $\frac{1}{10}$ soit 70 x $\frac{1}{10}$ = **7**
- Flibustier 2 : partage proportionnel à 65 et $\frac{1}{5}$ soit 65 x $\frac{1}{5}$ = **13**
- Flibustier 3 : partage proportionnel à 75 et $\frac{1}{15}$ soit 75 x $\frac{1}{15}$ = **5**

Total = 7 + 13 + 5 = **25**

Le premier reçoit les $\frac{7}{25}$ du butin, le deuxième les $\frac{13}{25}$ et le dernier les $\frac{5}{25}$.

P1 = $\frac{7}{25}$ x 2520 ≈ 705 ; P2 = $\frac{13}{25}$ x 2520 ≈ 1310 ; P3 = $\frac{5}{25}$ x 2520 ≈ 504

Cas particuliers des intervalles et des partages de longueur R136

Dans un problème de partage d'une longueur, les questions posées concernent souvent le nombre d'intervalles ou le nombre d'objets qui matérialise les intervalles. Il est important de bien lire l'énoncé afin de ne pas faire d'erreurs.

Exemples de problèmes :

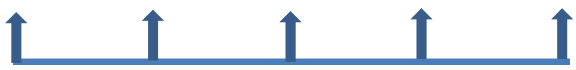
- Sur toute la longueur d'un chemin de 200 m, on plante un piquet tous les 20 mètres. Un piquet est planté à chaque extrémité. Combien de piquets sont nécessaires ?

Un dessin est souvent utile pour visualiser les données du problème et comprendre les principes de résolution.

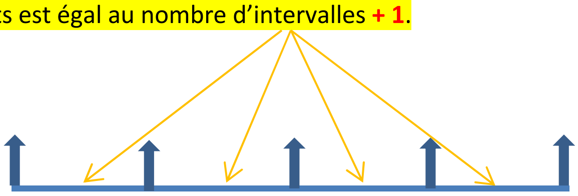
Dans ce problème la ligne est **ouverte** ; les deux extrémités de la longueur sont distinctes.

Dessinons une ligne

Plantons des piquets à chaque extrémité et à intervalles réguliers.



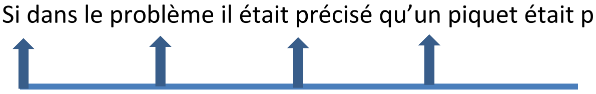
On remarque que le nombre de piquets est égal au nombre d'intervalles **+ 1**.



Revenons au problème et appliquons ce que nous venons de constater ;

Le chemin mesurant 200 mètres et un piquet étant planté tous les 20 mètres, le nombre d'intervalles est égal à ⇒ 200/20 = 10
Le nombre de piquets = 10 + 1 = 11

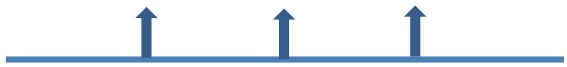
Si dans le problème il était précisé qu'un piquet était planté à une seule extrémité.



Dans ce cas le nombre de piquets est égal au nombre d'intervalles.

Le nombre d'intervalles = 200/20 = 10
Le nombre de piquets = 10

Si dans le problème il était précisé qu'on ne plantait aucun piquet aux extrémités.



Le nombre de piquets est égal au nombre d'intervalles moins 1.

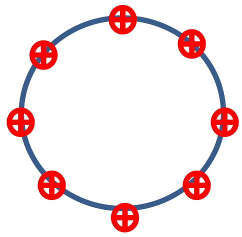
Le nombre d'intervalles = 200/20 = 10
Le nombre de piquets = 10 - 1 = 9

Un autre exemple de problème

Sur tout le périmètre (60m) d'un champ circulaire, on plante des poteaux espacés de 3 m. Combien de poteaux sont nécessaires ?

Dans ce problème, la ligne est **fermée**. Les deux extrémités sont confondues.

Dessinons un cercle et matérialisons des poteaux par des ⊕



On remarque que le nombre d'intervalles est égal au nombre de poteaux.

- Nombre d'intervalles = 60/3 = 20
- Nombre de poteaux = 20.

A savoir :

Pour une ligne ouverte avec des piquets à <u>chaque extrémité</u>, on a :

- Nombre de piquets = nombre d'intervalles + 1
- Nombre d'intervalles = nombre de piquets – 1

Pour une ligne ouverte avec un piquet à une seule extrémité, on a :

- Nombre de piquets = nombre d'intervalles

Pour une ligne ouverte avec aucun piquet aux extrémités, on a :

- Nombre de piquets = nombre d'intervalles - 1
- Nombre d'intervalles = nombre de piquets + 1

Pour une ligne fermée, on a :

- Nombre de piquets = nombre d'intervalles

Ne pas hésiter à faire un schéma si vous hésitez dans la résolution d'un problème.

Si les exercices concernent en général des arbres le long d'un chemin, de piquets le long d'un champ, les données peuvent se présenter sous une forme différente. Voir par exemple le deuxième exercice de la série 2 basé sur la vente de tickets de tombola.

EXERCICES série 1

Exercice 1
M GLOP et M GLUP se partagent 300 ha de terre. M GLOP a 52 ha de plus que M GLUP. Quelle est l'aire de la part de chacun ?

Exercice 2
Marc et Antoine ont 55 ans à eux deux. Marc a 7 ans de plus qu'Antoine. Donner l'âge de Marc et d'Antoine. (Résoudre sans poser d'équation)

Exercice 3
GLOP, GLUP et GLOUP jouent ensemble à la loterie intergalactique toutes les semaines. La somme qu'ils parient se répartit ainsi : GLOP donne 6 spountchs, GLUP 5 spountchs et GLOUP 3 spountchs. Le gain étant proportionnel à la mise, calculer le gain de chacun s'ils gagnent 840 spountchs.

Exercice 4
Sur la route départementale reliant le village de Frometin à celui de St Barnabé, distants de 6 km, des bornes lumineuses ont été installées tous les 200 mètres. La première borne est placée à 60 mètres de la sortie de Fromentin.
Combien y a-t-il de bornes entre les 2 villages ?
A quelle distance de St Barnabé est placée la dernière borne ?

Exercice 5
M. GLOP a décidé de partager ses gains à la loterie intergalactique entre ses trois neveux. Les parts seront proportionnelles à 6 ; 8 et 11. Quelle est le montant de chaque part sachant que les gains sont évalués à 3200 spountchs ?

EXERCICES série 2

Exercice 1
Trois maçons spécialisés dans la rénovation ont travaillé sur le chantier d'un immeuble. Le premier a été présent 9 jours, le second 13 jours et le troisième 10 jours. Pour leur travail, l'entreprise a versé en tout une somme de 3120 euros. Quel montant chacun a-t-il perçu ?

Exercice 2
Trois enfants ont vendu des tickets de tombola pour la kermesse du village. Le prix d'un ticket est de 2 €.

- Le premier a vendu du ticket n° 2513 au ticket n° 2562.
- Le deuxième a vendu du ticket n° 2412 au ticket n° 2441.
- Le troisième a vendu un certain nombre de tickets, à partir du numéro 1550.

La somme récoltée par les 3 enfants est de 210 €. Quel est le numéro du dernier ticket vendu par le troisième enfant ?

Exercice 3
Un rond-point circulaire a un diamètre de 4,48 mètres. On plante sur son pourtour des arbustes espacés de 2 mètres. Combien d'arbustes seront nécessaires ?

Exercice 4
Soit le tableau suivant :

	Au départ	A l'arrivée
Compteur kilométrique	230 450	231 500
Indication jauge essence	80 litres	27,5 litres

Quelle est la consommation d'essence aux 100 km de la voiture ?

Exercice 5
En parcourant à vélo une route bordée par des arbres de chaque côté, GLOP a compté 112 arbres. Il y a un arbre à chaque extrémité de la route et l'espace entre chaque arbre est de 25 mètres. Quelle est la longueur de la route ?

Exercice 6
Le père de Lydia décide de planter des arbres tout autour d'un terrain rectangulaire de 112 m sur 98 m. Il souhaite qu'ils soient régulièrement espacés, que la distance en m séparant deux arbres soit un nombre entier et qu'il y ait un arbre à chaque coin du terrain.
Quel nombre minimum d'arbres doit-il acheter ?

CORRIGES série1

Exercice 1

M GLUP reçoit la plus petite part, soit $\frac{300-52}{2} = \frac{248}{2}$ = 124 ha.

M GLOP reçoit 124 + 52 = 176 ha.

Exercice 2

Antoine, le moins âgé a $\frac{55-7}{2} = \frac{48}{2}$ = 24 ans.

Marc a 24 + 7 = 31 ans.

Exercice 3

Soit G1 les gains de Glop ; il a misé 6 spountchs
Soit G2 les gains de Glup ; il a misé 5 spountchs
Soit G3 les gains de Gloup ; il a misé 3 spountchs

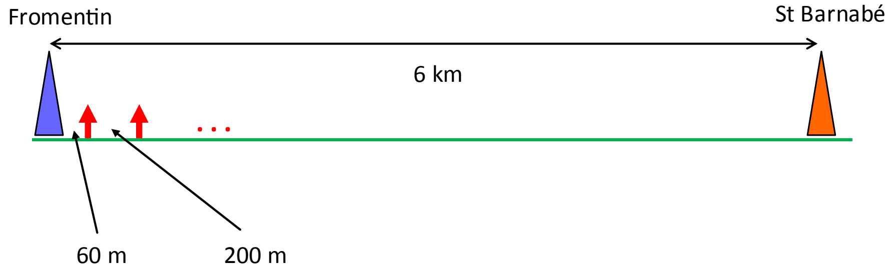
$\frac{G1}{6} = \frac{G2}{5} = \frac{G3}{3} = \frac{G1+G2+G3}{6+5+3} = \frac{840}{14}$ = 60

Gains de Glop $\Longrightarrow \frac{G1}{6}$ = 60 $\Longrightarrow$ G1 = 6 x 60 = 360 spountchs

Gains de Glup $\Longrightarrow \frac{G2}{5}$ = 60 $\Longrightarrow$ G2 = 5 x 60 = 300 spountchs

Gains de Gloup $\Longrightarrow \frac{G3}{3}$ = 60 $\Longrightarrow$ G3 = 3 x 60 = 180 spountchs

Exercice 4



La distance entre la première borne et St Barnabé = 6000 – 60 = 5940 mètres.
Le nombre d'intervalles de 200 m compris dans 5940 m = 5940 :200 = 29,7 intervalles.
On a donc 29 intervalles **entiers** de 200 m ; il reste 0,7 intervalle.
Comme il y a une borne à chaque extrémité, le nombre de bornes est égal au nombre d'intervalles plus un (règle **R136**).
Il y a 29 + 1 = 30 bornes.
La dernière borne est placée à 0,7 x 200 = 140 m du village de St Barnabé.

Exercice 5

La part de chaque neveu sera proportionnelle à 6, 8 et 11. Total : 6 + 8 + 11 = 25.

Pour le premier on aura : $\frac{part\ 1}{6} = \frac{3200}{25}$ = 128 $\Longrightarrow$ part 1 = 128 x 6 = 768 spountchs.

Pour le deuxième, on aura : $\frac{part\ 2}{8}$ = 128 $\Longrightarrow$ part 2 = 128 x 8 = 1024 spountchs.

Pour le troisième, on aura : $\frac{part\ 3}{11}$ = 128 $\Longrightarrow$ part 3 = 128 x 11 = 1408 spountchs.

Vérification : 1408 + 1024 + 768 = 3200.

CORRIGES série2

Exercice 1

Nombre total de jours de travail = 9 + 13 + 10 = 32

Prix d'une journée de travail = 3120/32 = 97,5 €.

- Le premier a reçu 97,5 x 9 = 877,5 €
- Le deuxième a reçu 13 x 97,5 = 1267,5 €
- Le troisième a reçu 10 x 97,5 = 975 €.

Exercice 2

Attention : il faut appliquer la règle R136 – fiche M14 : « Le nombre de piquets est égal au nombre d'intervalles + 1 ».

⇒

Nombre de tickets vendus par (enfant 1 ou enfant 2) sera égal à (numéro du dernier ticket – numéro du premier ticket) + 1

Nombre de tickets de l'enfant 1 : 2562 - 2513 + 1 = 50

Nombre de tickets de l'enfant 2 : 2441 – 2412 + 1 = 30

À eux deux, ils ont vendu 80 tickets et récolté 80 x 2 = 160 €.

Le troisième enfant a récolté 210 - 160 = 50 €. Il a vendu 50/2 = 25 tickets.

Le dernier numéro est 1550 + 25 – 1 = 1574.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1550	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	1574

Exercice 3

Périmètre du rond-point = 3,14 x 4,48 = 14,0672 soit 14 m.

R136 : la ligne étant fermée, le nombre d'arbustes est égal au nombre d'intervalles.

Nombre d'intervalles = 14/2 = 7.

Il faudra 7 arbustes.

Exercice 4

	Au départ	A l'arrivée
Compteur kilométrique	230 450	231 500
Indication jauge essence	80 litres	27,5 litres

Nombre de km parcourus : 231 500 – 230 450 = 1050.

Quantité d'essence consommée = 80 – 27,5 = 52,5 l

Règle de trois :

1050 km ⇒ 52,5 l

100 km ⇒ Y l   avec Y x 1050 = 52,5 x 100 ⇒ Y = 52 500/1050 = 5 litres

Consommation : 5 l/100.

Exercice 5

Nombre d'arbres sur un seul côté : 112 /2 = 56

Nombre d'intervalles = 56 – 1 = 55. (voire règle R136)

Longueur de la route = 55 x 25 = 1375 mètres.

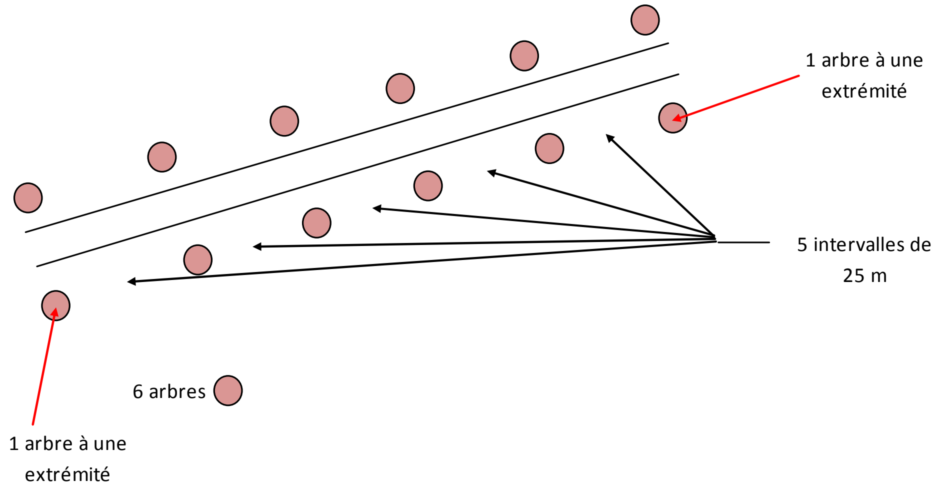
Ce type de problème est surtout basé sur une éventuelle confusion (recherchée par ailleurs !) entre « nombre de piquets ou arbres… » et intervalles.

A la différence des exemples donnés dans le cours ou l'on partait du nombre d'intervalles pour trouver le nombre de piquets, ici c'est l'inverse.

En cas de confusion, il ne faut pas hésiter à simplifier les données et à faire un schéma très succinct.

Considérons non pas 112 arbres mais seulement 12 arbres.

Le nombre d'arbres sur un seul côté de la route est alors de 12/2 = 6



On constate rapidement que nous avons 5 intervalles (soit le nombre d'arbres moins 1) de 25 mètres.

Pour reprendre les règles générales du cours.
Pour une ligne ouverte avec des piquets à chaque extrémité, on a :

- Nombre de piquets = nombre d'intervalles + 1
- Nombre d'intervalles = nombre de piquets – 1

C'est la même « équation ».

Exercice 6
La règle à retenir ici : lorsqu'on place des arbres sur une ligne fermée, le nombre d'intervalles séparant deux arbres consécutifs est égal au nombre d'arbres.

Appelons d la distance en m séparant deux arbres. d est un nombre entier d'après l'énoncé. Une des difficultés de cet exercice est que l'on ne connaît pas la valeur de d. Cependant, afin de planter le minimum d'arbres, d doit être la plus grande possible. Dans un premier temps, il faut déterminer la valeur de d.

Il y a un arbre à chaque coin du terrain donc d est un diviseur des nombres 112 et 98.
Comme d doit être la plus grande possible d doit donc être le plus grand diviseur commun de 112 et 98
Déterminons le PGCD par la méthode de l'algorithme d'Euclide :
112 = 1 × 98 + 14   PGCD(112 ; 98) = PGCD(98 ; 14)
98 = 7 × 14 + 0   PGCD(98 ; 14) = PGCD(14 ; 0) = 14
PGCD (112 ; 98) = 14
La distance d qui doit séparer deux arbres est 14 m.

Comme ⇒ 112 = 14 × 8
Et 98 = 14 × 7,
Il y aura 8 intervalles séparant deux arbres consécutifs sur la longueur et 7 intervalles séparant deux arbres consécutifs sur la largeur
Autour du terrain, il y aura donc 2(8 + 7) soit 30 intervalles séparant deux arbres consécutifs.
Nombre d'intervalles = nombre d'arbres
Le père de Lydia devra donc acheter 30 arbres.

Remarque :
Lorsque la valeur de d est connue (14 m) il est possible de procéder autrement.
Périmètre du champ = (112 + 98) x 2 = 210 x 2 = 420
Nombre d'intervalles = nombre d'arbres = 420 / 14 = 30.